

Relatività

June 5, 2016

1 Trasformazioni di Lorentz

1.1 Trasformazioni di Galileo e di Lorentz

- a Si scriva la matrice $\Lambda_{(y)}$ che descrive un boost di Lorentz lungo l'asse y.
- b Si scrivano le matrici $G_{(x)}$ e $G_{(y)}$ che descrivono, rispettivamente, le trasformazioni di Galileo lungo l'asse x e l'asse y (per un quadrivettore che includa, come primo elemento, ct).
- c Si scriva la matrice che descrive la composizione di una trasformazione galileiana lungo x e lungo y. L'ordine in cui vengono effettuate le trasformazioni ha importanza?
- d Si ripeta il punto precedente per i boost di Lorentz lungo x e lungo y.

1.2 Rapidità

Si può definire la cosiddetta rapidità $\theta \equiv \tanh^{-1}(\beta)$ che risulta, sotto certi aspetti, un modo più naturale di esprimere la velocità.

- a Si riscriva la matrice Λ per un boost di Lorentz lungo x utilizzando questa quantità per sostituire i termini γ e $-\beta\gamma$ e la si confronti con la matrice che descrive le rotazioni di un angolo θ , ad esempio attorno all'asse z. Nota: includendo anche il tempo nel vettore delle coordinate, questa rotazione diventa

$$\begin{pmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- b Si riscriva la regola di Einstein per la somma delle velocità utilizzando la rapidità.

1.3 Fallimento delle trasformazioni di Galileo

A che velocità relative tra due sistemi di riferimento, le coordinate ottenute tramite trasformazioni di Galileo differiscono da quelle ottenute con trasformazioni di Lorentz dello 0.1%, 1% e 10%?

1.4 Campo elettrico di una carica puntiforme in moto uniforme

Si derivi l'espressione per il campo elettrico prodotto da una carica puntiforme in moto uniforme utilizzando le trasformazioni di Lorentz applicate al tensore elettromagnetico $F^{\mu\nu}$.

2 Dilatazione dei tempi e contrazione delle lunghezze

2.1 Satelliti GPS

I satelliti del sistema GPS orbitano a 26300 km dal centro della Terra e completano un'orbita in circa 12 h. I satelliti emettono un segnale che contiene l'orario di emissione. Confrontando quest'ultimo con l'orario di ricezione, i ricevitori GPS possono calcolare la loro distanza dai satelliti e determinare la posizione in cui si trovano. Qual è la correzione da applicare agli orologi atomici presenti sui satelliti per compensare gli effetti dovuti alla relatività ristretta?

2.2 Orologio su un aereo

Un orologio atomico è posto su un aereo. L'orologio misura un intervallo di tempo pari a 3600 s con l'aereo che si muove ad una velocità di 400 m/s. Quanto più grande è l'intervallo di tempo segnato da un identico orologio a riposo sul suolo?

2.3 Bastone inclinato

Un bastone di lunghezza L_0 si muove con velocità v lungo l'asse orizzontale x . Il bastone forma un angolo θ_0 rispetto all'asse x . Si determini la lunghezza del bastone misurata da un osservatore stazionario rispetto al sistema di riferimento inerziale della Terra. Si determini l'angolo θ formato dal bastone rispetto all'asse x del sistema di riferimento stazionario.

2.4 Astronavi 1

Due astronavi si avvicinano l'una all'altra muovendosi alla stessa velocità se misurate da un osservatore stazionario rispetto al sistema di riferimento inerziale della Terra. La loro velocità relativa è pari a $0.7c$. Si determini la velocità di ciascuna astronave misurata dall'osservatore stazionario rispetto a Terra.

2.5 Astronavi 2

Due astronavi A e B si avvicinano l'una all'altra lungo direzioni ortogonali, e sono osservate rispetto al sistema di riferimento inerziale della Terra. Se A è osservata muoversi con velocità $u_y = -0.9 c$ e invece B si muove con $u_x = 0.9 c$, si determini la velocità dell'astronave A misurata dal pilota dell'astronave B.

2.6 Astronavi 3

Un'astronave viaggia dalla Terra ad un lontano pianeta in 5 anni del suo orologio. Per noi terrestri il pianeta dista 100 anni luce.

- a Qual velocità ha l'astronave (si determini γ o $\frac{c-v}{c}$)?
- b Quale distanza osserva di percorrere il comandante?
- c Durante il suo viaggio il comandante dell'astronave invia un segnale radio verso la Terra ogni anno del suo orologio. A che distanza temporale riceviamo noi terrestri i suoi messaggi?

2.7 Astronavi 4

Un pacchetto di elettroni viene sparato da un'astronave che si allontana dalla Terra con velocità v tale che $\frac{c-v}{c} = 10^{-7}$ verso un'altra astronave che fugge dalla prima con velocità di allontanamento dalla Terra v' con $\frac{c-v'}{c} = 10^{-8}$ quando le due astronavi distano tra loro un anno luce per un osservatore terrestre. L'energia cinetica del pacchetto di elettroni per l'astronauta inseguitore è di 1 GeV.

- a Si determini l'energia e la velocità degli elettroni per l'osservatore terrestre e per l'astronauta inseguito.
- b Assieme al pacchetto di elettroni una spia degli inseguiti invia un impulso radio all'astronave inseguita per avvisarli del pericolo. Quanto tempo hanno gli inseguiti per preparare uno schermo di difesa?

3 Radiazione di sincrotrone

3.1 Ondulatore 1

Un elettrone viaggia verso un osservatore fermo con energia cinetica di 1 GeV. L'osservatore lo vede attraversare un campo magnetico sinusoidale di periodo spaziale di 20 cm. L'elettrone emette radiazione elettromagnetica. Che frequenza misura l'osservatore?

3.2 Ondulatore 2

Un elettrone di momento $10 \text{ GeV}/c$ circola in un anello di accumulazione.

- a Qual è la differenza tra la velocità dell'elettrone e c ?
- b Qual è il rapporto tra energia a riposo ed energia cinetica per questo elettrone?
- c Per quale velocità dell'elettrone il rapporto tra energia a riposo ed energia cinetica è pari a 1?
- d L'elettrone entra in una zona in cui è presente un campo magnetico periodico con periodo spaziale, nel sistema del laboratorio, di 15 cm . Il campo magnetico induce un'oscillazione di frequenza propria ω_0 . Si valuti la frequenza ω_0 e la frequenza misurata da un osservatore, posto nella direzione in avanti, solidale con il laboratorio.
- e La radiazione viene riflessa all'indietro da uno specchio fisso nel laboratorio. Che frequenza misura un osservatore in moto con l'elettrone?

4 Effetto Doppler

4.1 Velocità relativa di oggetti astronomici 1

L'atomo neutro di idrogeno presenta una riga di emissione di radiazione elettromagnetica con lunghezza d'onda $\lambda \simeq 21 \text{ cm}$. Questa riga di emissione è molto importante perché può attraversare le polveri interstellari, a differenza di molte altre regioni dello spettro. Inoltre, essa cade nella cosiddetta finestra radio, l'intervallo di lunghezze d'onda nella regione delle onde radio a cui l'atmosfera terrestre è trasparente (da $\lambda \simeq 1 \text{ cm}$ a $\lambda \simeq 2 \text{ m}$), ed è quindi studiabile dalla superficie. Si osserva un oggetto che si allontana dalla Terra a una velocità $u = c/10$. Qual è la variazione relativa di frequenza della riga a 21 cm ?

4.2 Velocità relativa di oggetti astronomici 2

Si osserva una galassia che si muove ortogonalmente alla congiungente con la Terra e si trova che una riga di emissione, che a riposo sarebbe misurata a $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$, è spostata a $\lambda = 580 \text{ nm}$. A che velocità si sta muovendo la galassia relativamente alla Terra?

5 Cinematica di particelle relativistiche

5.1 Decadimento del muone

I muoni sono leptoni, ovvero particelle elementari della stessa famiglia degli elettroni, e hanno una massa pari a $105.7 \text{ MeV}/c^2$ (gli elettroni hanno massa $0.51 \text{ MeV}/c^2$). Sono delle particelle instabili con una vita media $\tau = 2.2 \mu\text{s}$ piuttosto

lunga, dopo la quale decadono in altre particelle elementari. Essi possono venire prodotti dai raggi cosmici che colpiscono gli strati alti dell'atmosfera terrestre. Supponendo che vengano prodotti ad un'altitudine di 10^4 m, quanta energia devono avere affinché raggiungano la superficie terrestre (entro la vita media)?

5.2 Decadimento del neutrone

La massa del neutrone è di $930.5 \text{ MeV}/c^2$ e la sua vita media τ è di 881.5 s (è il barione, ovvero una particella composta da tre quark, instabile con la vita media più lunga). Un neutrone si trova a 5000 anni luce dalla Terra. Che energia deve avere per raggiungere il nostro pianeta entro la sua vita media?

5.3 Decadimento del kaone

Un fascio collimato di kaoni emerge da un analizzatore (un oggetto che funge da "monocromatore", ovvero che a partire da particelle con molte energie diverse seleziona solo quelle con un'energia in particolare) con $E = 2 \text{ GeV}$. La vita media del kaone è di $1.2 \cdot 10^{-8} \text{ s}$. A che distanza il flusso di particelle si è ridotto del 10%?

5.4 Decadimento del mesone D^0

Un mesone D^0 decade in un rivelatore dopo aver percorso una distanza di 3 mm. L'energia totale dei prodotti del decadimento è di 20 GeV, mentre la massa del mesone D^0 è di $1.86 \text{ GeV}/c^2$. Quanto tempo ha vissuto la particella nel suo sistema di riferimento?

5.5 Energia nel centro di massa 1

In un anello di accumulazione al CERN avvengono delle collisioni (frontali) tra protoni di energia 30 GeV.

- a Qual è l'energia totale nel centro di massa?
- b Che energia deve avere un singolo protone in moto per ottenere la stessa energia nel centro di massa quando esso collide con un protone fermo?

5.6 Energia nel centro di massa 2

Si sta costruendo un acceleratore per produrre la particella Z^0 nella collisione e annichilazione di un elettrone (e^-) e un positrone (e^+ , l'antiparticella dell'elettrone), ovvero attraverso il processo

$$e^+ + e^- \rightarrow Z^0.$$

La massa della Z^0 è $M_Z = 92 \text{ GeV}/c^2$, mentre quella dell'elettrone e del positrone è $M_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2$. Affinché la nuova particella possa venire creata, l'energia totale nel membro sinistro del processo deve essere almeno uguale

all'energia totale nel secondo membro con la nuova particella ferma, ovvero almeno uguale alla sua "massa".

- a** Nel caso i fasci di elettroni e positroni si scontrino, si trovi l'energia minima degli elettroni (e quindi quella dei positroni).
- b** Nel caso, invece, in cui il fascio di positroni venga diretto su un bersaglio fermo (che contiene, quindi, elettroni fermi) qual è l'energia minima necessaria?
- c** Quali sono l'energia e la velocità della Z_0 dopo la produzione, come osservate nel sistema del laboratorio?