

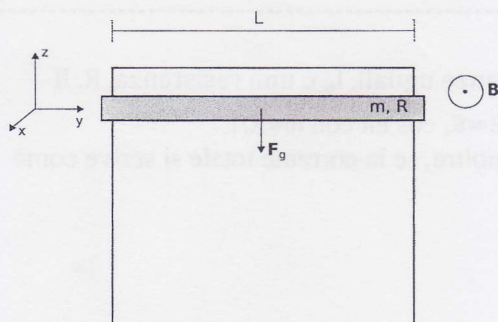
Problema 1

Una barra metallica libera di muoversi e soggetta alla forza di gravità $\vec{F}_g$ parallela a $\hat{z}$, chiude un circuito, come mostrato in figura. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\hat{x}$. Sapendo che la barra ha massa m , spessore trascurabile, resistenza R e lunghezza L , si calcoli:

- la corrente che scorre nel circuito in funzione della velocità della barra;
- la forza di Lorentz che agisce sulla sbarra, sempre in funzione della sua velocità;
- la velocità di regime raggiunta dalla barra (suggerimento: si noti che la velocità di regime è raggiunta quando le forze che agiscono sulla barra si annullano).

Inoltre si chiede:

- cosa cambierebbe se $\vec{B}$ cambiasse verso? Argomentare.
- Mostrare, con la barra alla velocità di regime, che la potenza dissipata nella resistenza è pari alla variazione di energia potenziale della barra.



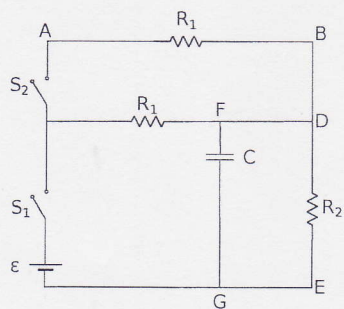
Problema 2 (facoltativo)

Nel circuito rappresentato in figura, la forza elettromotrice è pari a $\varepsilon = 10\text{V}$, le resistenze valgono $R_1 = 2\text{ k}\Omega$ e $R_2 = 1\text{ k}\Omega$, e la capacità del condensatore è $C = 5\text{ nF}$. Inizialmente gli interruttori S_1 e S_2 sono chiusi e lo stato del circuito è stazionario. Calcolare:

- la corrente I_{AB} che fluisce nel ramo AB;
- la carica Q_0 accumulata sul condensatore.

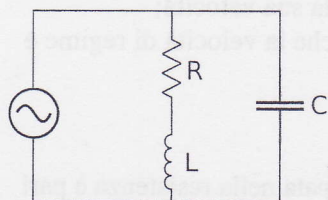
All'istante $t = 0$ si aprono entrambi gli interruttori. Calcolare:

- il tempo caratteristico di scarica τ ;
 - la corrente nel ramo DE al tempo $t = \tau$;
 - l'energia complessivamente dissipata nei resistori per $t \geq 0$.
- f - Argomentare perché, se S_2 non fosse stato aperto, le risposte ai tre punti precedenti non sarebbero cambiate.
- g - Argomentare perché la carica Q_0 calcolata al punto b non sarebbe cambiata se nel tratto FG ci fosse stata anche un'ulteriore resistenza R_2 in serie al condensatore.



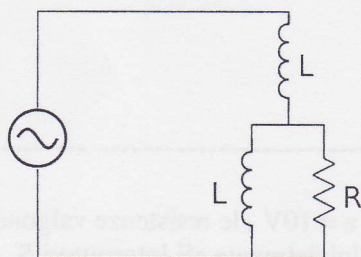
Problema 3

Considerando il circuito in figura si trovi la frequenza del generatore per la quale l'impedenza totale del circuito è puramente reale.



Problema 4

Si consideri il circuito in figura. Esso ha due induttanze uguali, L , e una resistenza, R . Il generatore eroga corrente alternata con tensione $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ con $\omega = R/L$. Si calcoli l'impedenza totale complessa del circuito. Inoltre, se la corrente totale si scrive come $I(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ quanto valgono I_0 e ϕ ?



PROBLEMA 1

$$\textcircled{a} \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} \quad ; \quad \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\Phi_B = BL\omega \quad \text{DOVE } \omega \text{ È LA DIMENSIONE DEL LATO DEL CIRCUITO LUNGO } \hat{z}$$

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - BL \frac{d\omega}{dt} = - BLv \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R} = - \frac{BLv}{R}$$

$\textcircled{b}$ LA FORZA DI LORENZ SULLA BARRA È DATA DA

$$\vec{F}_L = \int_0^L I d\vec{\ell} \times \vec{B} = - ILB \hat{z} = + \frac{B^2 L^2 v}{R} \hat{z}$$

$$\textcircled{c} \quad \vec{F}_g = -mg \hat{z} \quad ; \quad \vec{F}_L = \frac{B^2 L^2 v}{R} \hat{z}$$

$$\text{ALLA VELOCITÀ DI REGIME } (v=v_\infty) \quad \vec{F}_g + \vec{F}_L = 0$$

$$mg = \frac{B^2 L^2 v_\infty}{R}$$

$$v_\infty = \frac{mgR}{B^2 L^2}$$

$$\textcircled{d} \quad \text{NON CAMBIEREBBE NULLA : } v_\infty \propto \frac{1}{B^2} = \frac{1}{(-B)^2}$$

POICHÈ LA $\mathcal{E}$ E $\vec{F}_L$ AGIREBBERO COMUNQUE PER CONTRASTARE LA VARIAZIONE DI FLUSSO Φ_B .

$$\textcircled{e} \quad \frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (mg\omega) = mgv \quad \longrightarrow \text{ALLA VELOCITÀ DI REGIME : } \frac{dU}{dt} = mgv_\infty$$

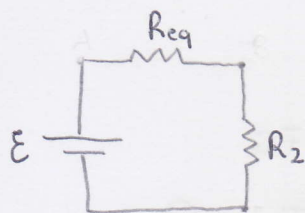
$$P = I^2 R = \frac{B^2 L^2 v_\infty^2}{R^2} \cdot R = \frac{B^2 L^2}{R} v_\infty^2$$

$$\frac{dU}{dt} = m \cdot g \frac{mgR}{B^2 L^2} = \left(\frac{mgR}{B^2 L^2} \right)^2 \frac{B^2 L^2}{R} = \frac{B^2 L^2}{R} v_\infty^2 = P \quad \checkmark$$

PROBLEMA 2

- Ⓐ ALLO STATO STAZIONARIO IL CONDENSATORE È COMPLETAMENTE CARICO E NEL RAMO FG NON SCORRE CORRENTE.

IL CIRCUITO PUÒ ESSERE DISEGNATO COME



DOVE $R_{eq} : \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} = \frac{2}{R_1}$

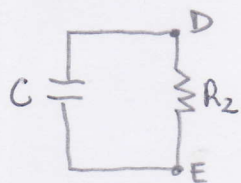
QUINDI LA CORRENTE TOTALE $I = \frac{E}{\left(\frac{R_1}{2} + R_2\right)} = 5 \text{ mA}$

LA CORRENTE NEL RAMO AB :

$I_{AB} = \frac{I}{2} = 2,5 \text{ mA}$ (siccome le due resistenze in parallelo sono uguali.)

Ⓑ $V_{\text{CONDENSATORE}} = V_{DE} = R_2 I = R_2 \frac{E}{\left(\frac{R_1}{2} + R_2\right)} ; Q_0 = C \cdot V_{DE} = \frac{C R_2 E}{\left(\frac{R_1}{2} + R_2\right)} = 25 \text{ nC}$

- Ⓒ PER TEMPI $t > 0$ IL CIRCUITO PUÒ ESSERE DISEGNATO COME :



IL TEMPO CARATTERISTICO DI SCARICA DEL CONDENSATORE

È $\tau = R_2 \cdot C = 5 \mu\text{s}$

Ⓓ $I_{DE}(t) = - \frac{dQ}{dt} = - \frac{d}{dt} \left(Q_0 e^{-t/\tau} \right) = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

$I_{DE}(\tau) = \frac{Q_0}{\tau} \frac{1}{e} = 1,84 \text{ mA}$

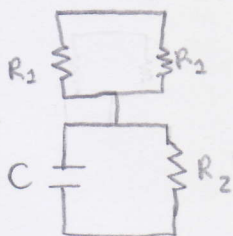
- Ⓔ L'ENERGIA COMPLESSIVAMENTE DISSIPATA NEL RESISTORE R_2 È PARI A QUELLA ACCUMULATA NEL CONDENSATORE : $U = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C}$

INFATTI : $U = \int_0^\infty dt I_{DE}^2(t) \cdot R_2 = \int_0^\infty dt \left(\frac{Q_0}{\tau} \right)^2 e^{-2t/\tau} R_2 = \frac{Q_0^2}{\tau^2} \cdot \frac{R_2}{2} (-\tau) e^{-2t/\tau} \Big|_0^\infty$

$$= \frac{R_2 Q_0^2}{2 \tau} = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad \text{USANDO CHE } \tau = R_2 C$$

$$= 62,5 \text{ mJ}$$

⑧ SE S_2 FOSSE RIMASTO CHIUSO IL CIRCUITO SI SAREBBE POTUTO SCHEMATIZZARE COME



QUINDI NON CI SAREBBE STATA ALCUNA CORRENTE ATTRAVERSO LE DUE RESISTENZE R_1 .

⑨ SE CI FOSSE STATA UNA RESISTENZA R_2 NEL RAMO FG Q_0 SAREBBE RIMASTA LA STESSA PERCHÉ $I_{FG} = 0$, E DUNQUE LA DIFFERENZA DI POTENZIALE AI CAPI DI TALE RESISTENZA SAREBBE STATA NULLA.

PROBLEMA 3

IMPIEDENZA TOTALE DEL CIRCUITO IN FORMA COMPLESSA:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{TOT} : \quad \frac{1}{\tilde{Z}_{TOT}} &= \frac{1}{\tilde{Z}_C} + \frac{1}{\tilde{Z}_{RL}} \\ &= i\omega C + \frac{1}{R + i\omega L} \\ &= \frac{i\omega RC - \omega^2 LC + 1}{R + i\omega L} = \frac{(R - i\omega L)(i\omega RC - \omega^2 LC + 1)}{(R + i\omega L)(R - i\omega L)} \\ &= \frac{i\omega R^2 C - \omega^2 RLC + R + \omega^2 RLC + i\omega^3 L^2 C - i\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ &= \frac{i\omega (R^2 C + \omega^2 L^2 C - L) + R}{R^2 + \omega^2 L^2}\end{aligned}$$

$\tilde{Z}_{TOT}$ È PURAMENTE REALE QUANDO LA SUA PARTE IMMAGINARIA SI ANNULLA:

$$\text{Im}(\tilde{Z}_{TOT}) = \omega (R^2 C + \omega^2 L^2 C - L) = 0$$

IGNORO LA SOLUZIONE
BANALE $\omega = 0$

$$(R^2 C + \omega^2 L^2 C - L) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{L - R^2 C}{L^2 C}$$

DEVE ESSERE VERIFICATA LA CONDIZIONE

$$L - R^2 C > 0 \Rightarrow R^2 < \frac{L}{C}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{L - R^2 C}{L^2 C}}$$

SI IGNORA ANCHE LA SOLUZIONE NON FISICA $\omega < 0$.

PROBLEMA 4

$$\tilde{Z}_{TOT} = \tilde{Z}_L + \frac{\tilde{Z}_R \cdot \tilde{Z}_L}{\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L} = iR + \frac{iR^2}{R + iR} = R \frac{2i-1}{1+i} = R \frac{(1+3i)}{2}$$

USO CHE

$$L\omega = R$$

$$\tilde{Z}_{TOT} = |\tilde{Z}_{TOT}| e^{i\phi} \Rightarrow \begin{cases} |\tilde{Z}_{TOT}| = \frac{R}{2} \sqrt{1+9} = \frac{R}{2} \sqrt{10} \\ \phi = \arctg\left(\frac{3}{1}\right) = \arctg(3) \end{cases}$$

CONSIDERO LA F.E.M. IN FORMA COMPLESSA $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t}$
E LA CORRENTE IN FORMA COMPLESSA $\tilde{I} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$

Sapendo che

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{\tilde{Z}_{TOT}} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{i\omega t}}{|\tilde{Z}_{TOT}| e^{i\phi}} = \frac{\mathcal{E}_0}{|\tilde{Z}_{TOT}|} e^{i(\omega t - \phi)} = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$$

DUNQUE $I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\frac{R}{2} \sqrt{10}} = \frac{2\mathcal{E}_0}{R\sqrt{10}}$

$$\varphi = -\phi = -\arctg(3) = \arctg(-3)$$

↓
L'ARCO TANGENTE

È UNA FUNZIONE DISPARI