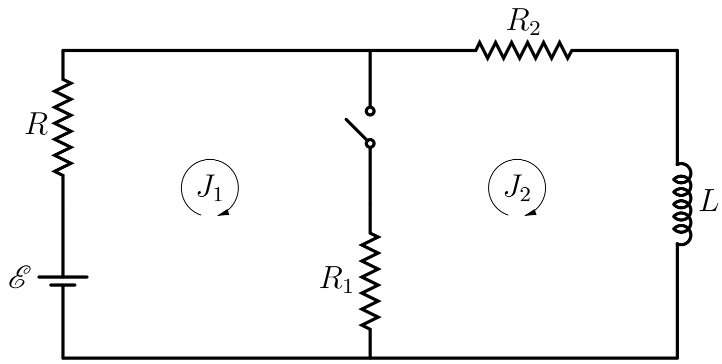
CIRCUITI IN CORRENTE CONTINUA

1 Un'induttanza e tre resistenze



Il circuito sta funzionando da $t = -\infty$ con l'interruttore aperto. Al tempo $t = 0$ l'interruttore viene chiuso. Calcolare le correnti.

Per $t \leq 0$ circola corrente solo nella maglia esterna ed il suo valore è dato da:

$$J_0 = \frac{\mathscr{E}}{R + R_2} \tag{1}$$

questo valore costituisce la condizione iniziale per J_1 e J_2:

$$J_{1_0} = J_{2_0} = J_0 \tag{2}$$

Applichiamo il metodo delle correnti di maglia alle due maglie indicate in figura:

$$\begin{cases} \mathscr{E} & = & RJ_1 + R_1(J_1 - J_2) \\ 0 & = & R_1(J_2 - J_1) + R_2J_2 + L\dot{J}_2 \end{cases} \tag{3}$$

(con $\dot{J}_2$ indico la derivata rispetto al tempo di J_2).Ricaviamo J_1 dalla prima equazione e sostituiamola nella seconda:

$$J_1 = \frac{\mathscr{E} + R_1J_2}{R + R_1} \tag{4}$$

$$R_1J_2 - R_1\frac{\mathscr{E} + R_1J_2}{R + R_1} + R_2J_2 + L\dot{J}_2 = 0 \tag{5}$$

riordiniamo i termini:

$$L\dot{J}_2 + \left(R_1 + R_2 - \frac{R_1^2}{R + R_1}\right) J_2 - \frac{R_1}{R + R_1}\mathscr{E} = 0 \tag{6}$$

Notiamo ora che il coefficiente di J_2 è la resistenza del circuito vista ai capi dell'induttanza, ossia R_2 in serie col parallelo tra R ed R_1. Chiameremo R_L questa resistenza. La soluzione generale dell'equazione omogenea è data da:

$$J_2(t) = \alpha e^{-\frac{R_L}{L}t} \tag{7}$$

una soluzione particolare dell'equazione completa:

$$J_2 = \frac{R_1}{R_L(R + R_1)}\mathscr{E} \tag{8}$$

e la soluzione generale:

$$J_2(t) = \alpha e^{-\frac{R_L}{L}t} + \frac{R_1}{R_L(R+R_1)}\mathscr{E} \tag{9}$$

Potete verificare che il termine costante nella (9) è la corrente che si ha nel ramo $R_2 - L$ quando l'induttanza è sostituita da un cortocircuito:

$$J_{2_\infty} = \frac{\mathscr{E}}{R + R_1//R_2} \cdot R_1//R_2 \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{R_1}{R_L(R+R_1)}\mathscr{E} \tag{10}$$

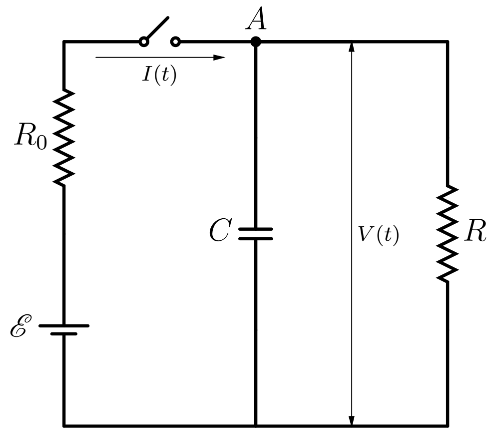
ed è ovviamente la corrente nella seconda maglia per tempi molto grandi.
La condizione iniziale $J_2(0) = J_{2_0}$ ci permette di determinare α:

$$J_2(t) = J_{2_0} e^{-\frac{R_L}{L}t} + \frac{R_1}{R_L(R+R_1)}\mathscr{E}\left(1 - e^{-\frac{R_L}{L}t}\right) \tag{11}$$

Sostituendo questa espressione in (4) otteniamo $J_1(t)$.
Infine, utilizzando le correnti al tempo zero e a tempi molto grandi, J_{2_0} e J_{2_∞}, possiamo riscrivere la (11) in una forma che rende più chiaro il significato dei vari termini:

$$J_2(t) = (J_{2_0} - J_{2_\infty})e^{-\frac{R_L}{L}t} + J_{2_\infty} \tag{12}$$

2 Condensatore con resistenze in parallelo



Inizialmente il condensatore è scarico; calcolare la differenza di potenziale ai suoi capi, $V(t)$, a partire dall'istante in cui l'interrutttore viene chiuso.

Indichiamo con Q la carica sul condensatore e applichiamo le leggi di Kirchoff: nella maglia $generatore - R_0 - condensatore$ si ha per le differenze di potenziale:

$$\mathscr{E} = R_0 I + V(t) \quad ; \quad V(t) = \frac{Q}{C} \tag{13}$$

nel nodo A la corrente I si divide in quella nella resistenza ed in quella nel condensatore:

$$I = \frac{V(t)}{R} + \dot{Q} \tag{14}$$

(con $\dot{Q}$ indico la derivata rispetto al tempo di Q). Sostituendo la seconda equazione nella prima:

$$\mathscr{E} = \frac{R_0}{R} V(t) + R_0 \dot{Q} + V(t) = \frac{R_0}{R} V(t) + R_0 C \dot{V}(t) + V(t) \tag{15}$$

riordinando i termini:

$$\dot{V}(t) + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_0}\right) V(t) - \frac{\mathscr{E}}{R_0 C} = 0 \tag{16}$$

ossia:

$$\dot{V}(t) + \frac{1}{R_C C} V(t) - \frac{\mathscr{E}}{R_0 C} = 0 \quad ; \quad R_C = R // R_0 \tag{17}$$

La soluzione generale:

$$V(t) = \alpha e^{-\frac{t}{R_C C}} + \mathscr{E}\frac{R_C}{R_0} \tag{18}$$

e quella con la condizione iniziale $V(0) = 0$:

$$\boxed{V(t) = \mathscr{E}\frac{R_C}{R_0}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_C C}}\right) = \mathscr{E}\frac{R}{R_0 + R}\left(1 - e^{-\frac{t}{R_C C}}\right)} \tag{19}$$

Calcoliamo la corrente $I(t)$ dalla (13):

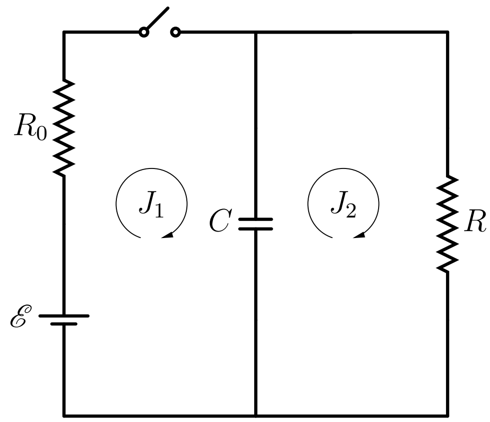
$$\boxed{I(t) = \frac{1}{R_0}\left(\mathscr{E} - V(t)\right) = \frac{\mathscr{E}}{R_0(R_0 + R)}\left(R_0 + R e^{-\frac{t}{R_C C}}\right)} \tag{20}$$

Notate che:

- La resistenza che compare nella costante di tempo è quella del circuito vista ai capi del condensatore: il parallelo tra R_0 ed R.

- A $t = 0$ la corrente vale $\frac{\mathscr{E}}{R_0}$: il condensatore, quando è scarico, si comporta come un corto circuito.
- A tempi grandi, per $t \gg R_C C$, la corrente vale $\sim \frac{\mathscr{E}}{R+R_0}$: dopo che si è caricato, il condensatore si comporta come un circuito aperto.
- Se $R_0 = 0$, $R_C = 0$: il condensatore si carica istantaneamente.

Vediamo come si applica in questo caso il metodo delle correnti di maglia, anche se risulta più elaborato di quello che abbiamo usato:



Trattiamo il condensatore come un generatore e scriviamo le due equazioni:

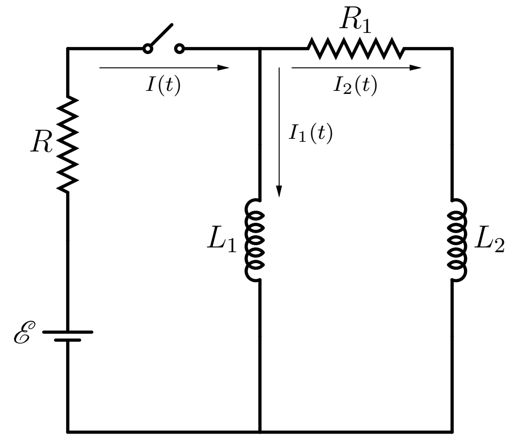
$$\begin{aligned} \mathscr{E} - \frac{Q}{C} &= R_0 J_1 \\ \frac{Q}{C} &= R J_2 \end{aligned} \tag{21}$$

Il segno di $\frac{Q}{C}$ nella seconda equazione cambia perchè il percorso nella seconda maglia attraversa il condensatore in verso opposto rispetto alla prima.
Il punto cruciale è che queste non sono equazioni algebriche, perchè J_1, J_2 e Q somo legate dalla relazione:

$$J_1 - J_2 = \dot{Q} \tag{22}$$

Utilizzando queste tre relazioni arriviamo alla equazione differenziale scritta prima.

3 Due induttanze e due resistenze



Scriviamo le due equazioni per le cadute di potenziale nelle due maglie $\mathscr{E} - R - L_1$ e $R_1 - L_2 - L_1$ percorse in senso orario:

$$\begin{cases} \mathscr{E} &= RI + L_1\dot{I}_1 = RI_1 + RI_2 + L_1\dot{I}_1 \\ 0 &= R_1 I_2 + L_2\dot{I}_2 - L_1\dot{I}_1 \end{cases} \tag{23}$$

Un sistema di equazioni differenziali lineari di questo tipo si risolve in questo modo: trattandolo come un sistema di equazioni algebriche nelle incognite I_1 e $\dot{I}_1$, lo si risolve e si ottengono I_1 e $\dot{I}_1$ in termini di I_2, $\dot{I}_2$ e delle costanti. Sostituendo queste espressioni in una delle due equazioni si ottiene un'equazione differenziale lineare del secondo ordine nell'incognita I_2 ; la si risolve e si sostituisce la soluzione generale così trovata nella espressione di I_1 scritta inizialmente. Si ottengono così le due espressioni di $I_1(t)$ e $I_2(t)$ contenenti due costanti arbitrarie da determinare con le condizioni iniziali per le due correnti. Naturalmente si può, in alternativa, risolvere inizialmente il sistema rispetto a I_2 e $\dot{I}_2$. Nel nostro caso questa procedura è semplificata dal fatto che la prima equazione non contiene $\dot{I}_2$.

Ricaviamo I_2 dalla prima delle (23):

$$I_2 = \frac{1}{R}\left(\mathscr{E} - L_1\dot{I}_1\right) - I_1 \tag{24}$$

e sostituiamo nella seconda:

$$0 = \frac{R_1}{R}\left(\mathscr{E} - L_1\dot{I}_1\right) - R_1 I_1 + L_2\left(-\frac{L_1}{R}\ddot{I}_1 - \dot{I}_1\right) - L_1\dot{I}_1 \tag{25}$$

riordinando i termini e dividendo per il coefficiente di $\ddot{I}_1$:

$$\ddot{I}_1 + \left(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}\right)\dot{I}_1 + \frac{R_1}{L_2}\frac{R}{L_1}I_1 - \frac{R_1}{L_1 L_2}\mathscr{E} = 0 \tag{26}$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica si scrive:

$$\lambda^2 + \left(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}\right)\lambda + \frac{R_1}{L_2}\frac{R}{L_1} = 0 \tag{27}$$

Il discriminante di questa equazione è sempre positivo:

$$\Delta = \left(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}\right)^2 - 4\frac{R_1}{L_2}\frac{R}{L_1} = \left(\frac{R_1}{L_2} - \frac{R}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{R}{L_2}\right)^2 + 2\frac{R_1}{L_2}\frac{R}{L_2} + 2\frac{R}{L_1}\frac{R}{L_2} \tag{28}$$

Quindi le radici sono reali:

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{R_1}{L_2} + \frac{R}{L_1} + \frac{R}{L_2}\right) \pm \sqrt{\Delta}\right] \tag{29}$$

e considerando l'espressione di Δ possiamo verificare che sono entrambe negative; indichiamole con $-\lambda_1$ e $-\lambda_2$ ($\lambda_i \geq 0$). La soluzione generale della equazione omogenea sarà allora data da:

$$I_1(t) = \alpha e^{-\lambda_1 t} + \beta e^{-\lambda_2 t} \tag{30}$$

Il termine noto nella (26) è costante, quindi una soluzione particolare di questa equazione è data dalla costante:

$$I_1(t) = \frac{\mathscr{E}}{R} \tag{31}$$

In conclusione la soluzione generale è data da:

$$\boxed{I_1(t) = \alpha e^{-\lambda_1 t} + \beta e^{-\lambda_2 t} + \frac{\mathscr{E}}{R}} \tag{32}$$

Sostitunedo in (24):

$$\boxed{I_2(t) = \alpha\left(\frac{L_1\lambda_1}{R} - 1\right)e^{-\lambda_1 t} + \beta\left(\frac{L_1\lambda_2}{R} - 1\right)e^{-\lambda_2 t}} \tag{33}$$

Come verifica, notate in queste espressioni che i valori che si ottengono per grandi t sono, come devono essere, quelli che si hanno nel circuito con le induttanze sostituite da cortocircuiti. Un'altra verifica potete farla ponendo $R_1 = 0$: in questo caso la seconda maglia del circuito si riduce a due induttanze in parallelo. Applichiamo ora le condizioni iniziali $I_1(0) = I_2(0) = 0$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \frac{\mathscr{E}}{R} = 0 \\ \\ \alpha\left(1 - \frac{L_1\lambda_1}{R}\right) + \beta\left(1 - \frac{L_1\lambda_2}{R}\right) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

introducendo la costante

$$K = \frac{L_1\lambda_2 - R}{L_1\lambda_1 - R} \tag{35}$$

abbiamo:

$$\alpha = -\beta K \qquad ; \qquad \beta = \frac{\mathscr{E}}{R(K-1)} \tag{36}$$

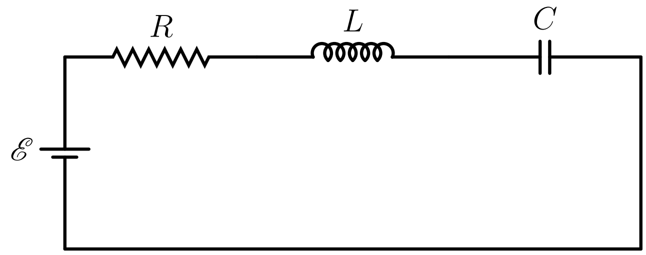
e quindi:

$$I_1(t) = \frac{\mathscr{E}}{R(K-1)}\left(-Ke^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t}\right) + \frac{\mathscr{E}}{R} \tag{37}$$

questa espressione tende ovviamente a $\frac{\mathscr{E}}{R}$; dal punto di vista matematico, potrebbe farlo, a seconda del valore di K,λ_1 e λ_2, sia per valori sempre positivi che per valori negativi per piccoli t e poi positivi. Potete tuttavia verificare che nel nostro caso $I_1(t)$ è sempre positiva, come ci aspettiamo dalla fisica delle induttanze.

Per fare una verifica rapida potete ad esempio utilizzare i primi termini dello sviluppo in serie degli esponenziali per piccoli t,$e^{-\lambda_i t} \simeq 1 - \lambda_i t$, ed utilizzare l'espressione di K per mostrare che $I_1(t)$ è sempre positivo per qualunque valore dei λ_i; oppure calcolare la derivata in $t = 0$.

4 RLC serie



L'equazione si scrive:

$$\mathscr{E} = RI + L\dot{I} + \frac{Q}{C} \tag{38}$$

la procedura più semplice sarebbe di derivarla, con $\dot{Q} = I$, e risolverla nell'incognita I. Risolviamola invece rispetto a Q:

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} - \mathscr{E} = 0 \tag{39}$$

L'equazione completa ha la soluzione particolare:

$$Q = C\mathscr{E} \tag{40}$$

Risolviamo ora l'omogenea associata;l'equazione caratteristica:

$$L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0 \tag{41}$$

ha le due soluzioni:

$$\lambda_{1/2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} \tag{42}$$

Si possono ora presentare tre casi:

A) $$\boxed{\boldsymbol{R^2 - 4\frac{L}{C} > 0}}$$

in questo caso le λ_i sono entrambe reali e negative e la soluzione dell'equazione omogenea è data dalla combinazione lineare, con costanti arbitrarie, di due esponenziali decrescenti; la soluzione generale dell'equazione completa si scrive quindi:

$$Q(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t} + C\mathscr{E} \tag{43}$$

B) $$\boxed{\boldsymbol{R^2 - 4\frac{L}{C} < 0}}$$

Introducendo la costante reale e positiva:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{44}$$

la soluzione generale si scrive:

$$\begin{aligned} Q(t) &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left(a_1 e^{i\omega_0 t} + a_2 e^{-i\omega_0 t}\right) + C\mathscr{E} \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left(b_1 cos(\omega_0 t) + b_2 sin(\omega_0 t)\right) + C\mathscr{E} \\ &= Ae^{-\frac{R}{2L}t} cos(\omega_0 t + \phi) + C\mathscr{E} \end{aligned} \tag{45}$$

nella seconda e nella terza espressione abbiamo ridefinito le costanti arbitrarie:

$$b_1 = a_1 + a_2 \quad ; \quad b_2 = i\,(a_1 - a_2) \quad ; \quad A = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \quad ; \quad cos(\phi) = \frac{b_1}{A} \quad ; \quad sin(\phi) = -\frac{b_2}{A} \tag{46}$$

queste ultime due espressioni sono più adatte a trattare il caso fisico perchè avremo soluzioni reali per valori reali delle costanti arbitrarie b_1 e b_2 o A e ϕ.

C) $$\boxed{\boldsymbol{R^2 - 4\frac{L}{C} = 0}}$$

Come sapete, in questo caso la soluzione generale si scrive:

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\,(a_1 + a_2 t) + C\mathscr{E} \tag{47}$$

Notate che questo è il caso in cui, a parità di R e di L, la convergenza verso il valore limite è più rapida e senza oscillazioni.
Come vediamo, al variare delle costanti e delle condizioni iniziali possiamo avere una grande varietà di situazioni:

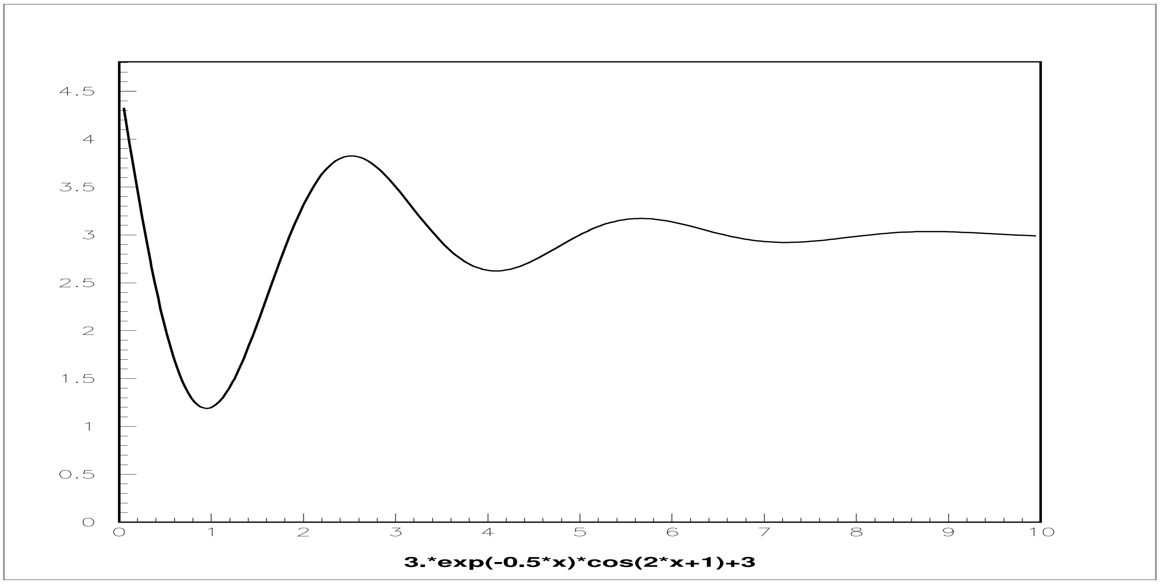


Figura 1: Oscillazioni smorzate esponenzialmente attorno al valore limite

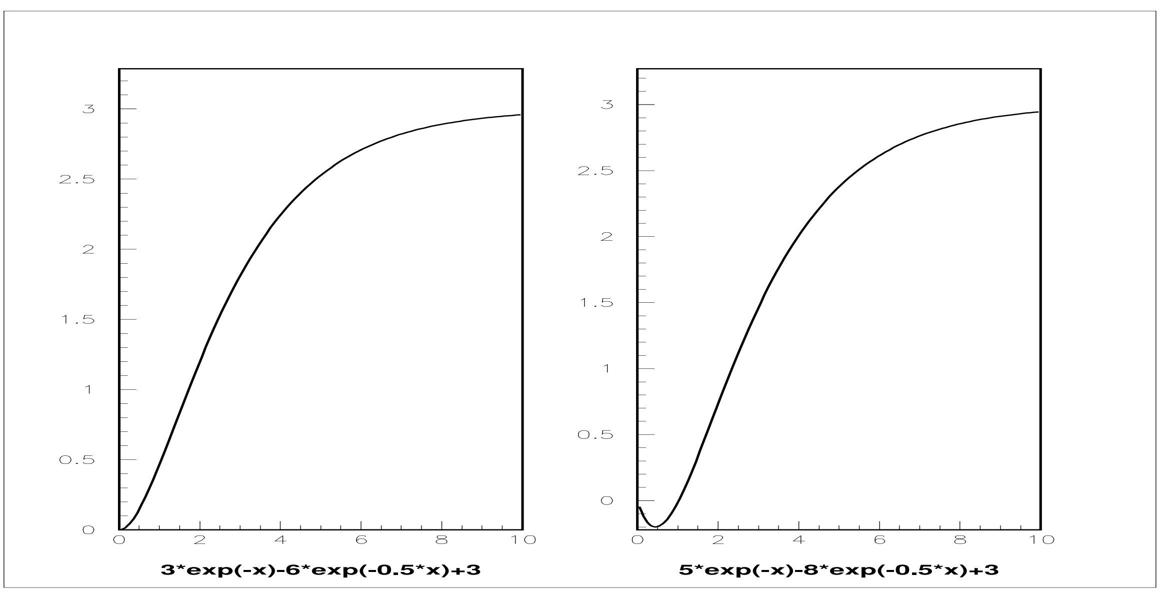
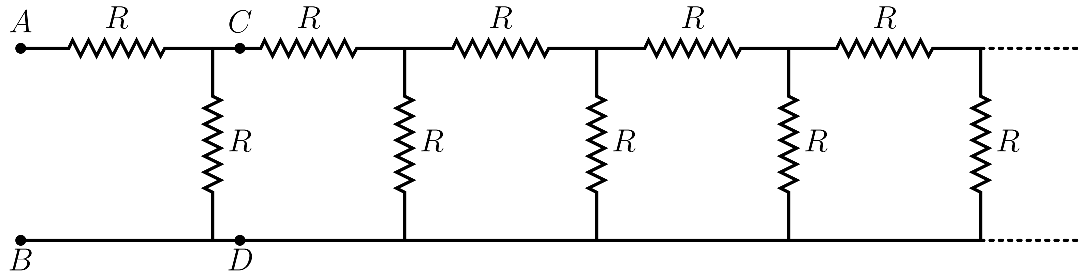
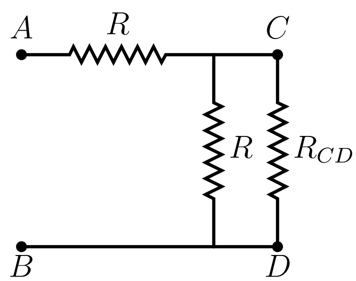


Figura 2: Convergenza esponenziale, monotona e non, verso il valore limite

5 Una linea semiinfinita



La linea è semiinfinita, cioè la cella elementare di due resistenze è ripetuta a destra infinite volte. Data R, vogliamo calcolare la resistenza misurata ai capi A e B,R_{AB}.
Potete sbizzarrirvi a scrivere l'espressione di R_{AB} aggiungendo una cella alla volta e poi calcolare il limite per il numero di celle che va a infinito.
Ma c'è un ragionamento che sfrutta le proprietà del limite e che ci permette di risolvere il problema in due passaggi; l'osservazione cruciale è che la linea a destra di AB e quella a destra di CD sono entrambe semiinfinite e hanno la stessa configurazione, quindi il limite deve essere lo stesso per entrambe.
Sostituiamo dunque la linea a destra di CD con la sua resistenza equivalente R_{CD}:



e imponiamo che R_{AB} e R_{CD} siano uguali:

$$R_{AB} = R + R//R_{CD} = R + R//R_{AB} \tag{48}$$

questa equazione ha un'unica soluzione positiva:

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}R \simeq 1.618R \tag{49}$$