

Figura 14.20

### 14.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte. Formule di Fresnel

Nel paragrafo 14.3 abbiamo visto le relazioni geometriche tra le direzioni di propagazione dell'onda elettromagnetica incidente, riflessa e rifratta, indipendenti dall'ampiezza dell'onda incidente:

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{n_2(\omega)}{n_1(\omega)} = \sqrt{\frac{\kappa_2(\omega)}{\kappa_1(\omega)}} \quad (14.14)$$

L'ultima eguaglianza sfrutta la relazione (13.10), ovvero (13.54), tra indice di rifrazione  $n(\omega)$  e costante dielettrica relativa  $\kappa_e(\omega)$ .

Le relazioni tra le ampiezze si ricavano dalle equazioni di Maxwell, precisamente dalle condizioni di continuità dei campi, già derivate a partire dalle suddette equazioni. Ricordiamo che dati due dielettrici omogenei e isotropi, di costanti dielettriche  $\epsilon_1 = \epsilon_0 \kappa_1$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon_0 \kappa_2$  e permeabilità magnetiche  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , è possibile stabilire relazioni tra le componenti del campo elettrico  $\mathbf{E}$ , dell'induzione dielettrica  $\mathbf{D}$ , del campo magnetico  $\mathbf{B}$  e del campo  $\mathbf{H}$  in un mezzo e nell'altro, in punti molto vicini alla superficie di separazione  $\Sigma$  tra i mezzi. Individuando col simbolo  $p$  le componenti parallele a  $\Sigma$  e col simbolo  $n$  le componenti normali, si ha

$$\frac{D_{1,p}}{\epsilon_0 \kappa_1} = E_{1,p} = E_{2,p} = \frac{D_{2,p}}{\epsilon_0 \kappa_2}, \quad H_{1,p} = \frac{B_{1,p}}{\mu_1} = \frac{B_{2,p}}{\mu_2} = H_{2,p}, \quad (14.15)$$

$$D_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_1 E_{1,n} = \epsilon_0 \kappa_2 E_{2,n} = D_{2,n}, \quad B_{1,n} = \mu_1 H_{1,n} = \mu_2 H_{2,n} = B_{2,n};$$

sono cioè continue le componenti parallele di  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e le componenti normali di  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , discontinue le altre. Le relazioni (14.15) sono state ricavate nei paragrafi 5.7, 9.5 e valgono sia nei casi statici che nei casi *dinamici*, cioè quando i campi dipendono dal tempo.

Se sulla superficie  $\Sigma$  incide un'onda elettromagnetica piana

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0,i} \sin(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega t),$$

essa dà origine ad un'onda riflessa e un'onda trasmessa,

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0,r} \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad \mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0,t} \sin(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Su  $\Sigma$  l'onda riflessa si somma all'onda incidente dando il campo elettrico risultante nel primo mezzo,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r$ ; nel secondo mezzo il campo elettrico vale  $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t$ . Analoghe relazioni valgono per i campi magnetici,  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_t$ . A questi campi, e ai campi ausiliari  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu$ , si applicano le relazioni (14.15).

Dal momento che sulla superficie  $\Sigma$  la fase di tutte le onde implicate è la stessa, le (14.15) si trasformano in relazioni tra le ampiezze dei campi incidenti, riflessi e rifratti.

#### Intensità riflessa e rifratta per onde polarizzate nel piano di incidenza

Nella figura 14.21 è indicata la situazione particolare in cui il campo elettrico incidente è polarizzato rettilineamente nel piano  $\pi$  di incidenza; dimostriamo innanzitutto che, come mostrato in figura, il campo elettrico riflesso e quello rifratto sono anch'essi polarizzati nel piano  $\pi$ . Per ipotesi il campo magnetico  $\mathbf{B}$ , è

ortogonale al disegno e rivolto verso il lettore; inoltre il campo  $\mathbf{B}$  è continuo nel passaggio attraverso  $\Sigma$  in quanto assumiamo trascurabili le proprietà magnetiche dei dielettrici ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ). Dunque  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}_t$ . Allora se  $\mathbf{B}_r$ , pur restando ortogonale alla direzione di propagazione del raggio riflesso, non fosse ortogonale al piano  $\pi$  acquistando ad esempio una componente  $B^*$  nel piano  $\pi$ , anche  $\mathbf{B}_i$  per continuità dovrebbe acquistare la stessa componente e non risulterebbe più ortogonale alla direzione di propagazione del raggio rifratto (figura 14.22). Quindi  $\mathbf{B}_r$  e  $\mathbf{B}_t$  devono essere ortogonali a  $\pi$  come  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{E}_r$ , ed  $\mathbf{E}_r$  devono stare su  $\pi$ .

Chiamiamo  $E_{0,\pi}^i, E_{0,\pi}^r, E_{0,\pi}^t$  le ampiezze dei campi e applichiamo le (14.15):

$$E_{0,\pi}^i \cos \theta_i - E_{0,\pi}^r \cos \theta_r = E_{0,\pi}^t \cos \theta_t,$$

$$\kappa_1 E_{0,\pi}^i \sin \theta_i + \kappa_1 E_{0,\pi}^r \sin \theta_r = \kappa_2 E_{0,\pi}^t \sin \theta_t,$$

Tenuto conto della (14.14)  $\kappa_2 / \kappa_1 = (n_2 / n_1)^2 = (\sin \theta_t / \sin \theta_i)^2$ , si ricava per le ampiezze incognite  $E_{0,\pi}^r = r_\pi E_{0,\pi}^i, E_{0,\pi}^t = t_\pi E_{0,\pi}^i$ , con

$$r_\pi = \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,\pi}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{\sin \theta_t \cos \theta_i - \sin \theta_i \cos \theta_t}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_t)}, \quad (14.16)$$

$$t_\pi = \frac{E_{0,\pi}^t}{E_{0,\pi}^i} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin \theta_t \cos \theta_i + \sin \theta_i \cos \theta_t} = \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos \theta_i - \theta_t}$$

Le (14.16), dette *formule di Fresnel nel piano  $\pi$* , definiscono i coefficienti  $r_\pi$  e  $t_\pi$  che permettono di calcolare a partire dall'ampiezza incidente le ampiezze riflesse e rifratte: essi dipendono soltanto dall'angolo di incidenza e dall'angolo di rifrazione, ovvero dall'angolo di incidenza e dall'indice di rifrazione relativo.

Ciascuna delle onde considerate ha un'intensità data da (13.26),

$$I_\pi^i = \frac{n_1}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^i)^2, \quad I_\pi^r = \frac{n_1}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^r)^2, \quad I_\pi^t = \frac{n_2}{2 Z_0} (E_{0,\pi}^t)^2,$$

e una corrispondente potenza che scriviamo

$$W_\pi^i = \Sigma_i I_\pi^i, \quad W_\pi^r = \Sigma_r I_\pi^r, \quad W_\pi^t = \Sigma_t I_\pi^t.$$

$\Sigma_i$  è la sezione del fascio incidente: la sezione del fascio riflesso è eguale,  $\Sigma_r = \Sigma_i$ , come si deduce dalla figura 14.23, mentre per la sezione del fascio trasmesso si ha:

$$\Sigma_t = \Sigma_0 \cos \theta_t, \quad \Sigma_i = \Sigma_0 \cos \theta_i \Rightarrow \frac{\Sigma_i}{\cos \theta_i} = \frac{\Sigma_r}{\cos \theta_i} \Rightarrow \frac{\Sigma_r}{\Sigma_i} = \frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_t}$$

La percentuale di potenza riflessa è

$$\frac{W_\pi^r}{W_\pi^i} = \frac{\Sigma_r I_\pi^r}{\Sigma_i I_\pi^i} = \left( \frac{E_{0,\pi}^r}{E_{0,\pi}^i} \right)^2 = r_\pi^2$$

e questo rapporto si chiama *coefficiente di riflessione nel piano  $\pi$* :

$$R_\pi = \frac{W_\pi^r}{W_\pi^i} = r_\pi^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{tg}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (14.17) \quad \text{Coefficiente di riflessione nel piano } \pi$$

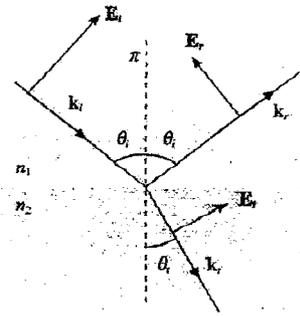


Figura 14.21

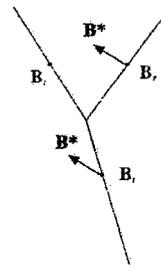


Figura 14.22

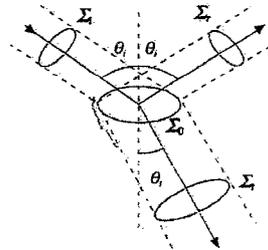


Figura 14.23

In modo analogo si procede per la percentuale di potenza trasmessa, facendo attenzione al fatto che  $\Sigma_r$  e  $\Sigma_t$  non sono uguali:

$$\frac{W'_\pi}{W_\pi} = \frac{\Sigma_r I'_\pi}{\Sigma_t I_\pi} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} \left( \frac{E'_{0,\pi}}{E_{0,\pi}} \right)^2 = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 ;$$

il coefficiente di trasmissione nel piano  $\pi$  è quindi

Coefficiente di trasmissione nel piano  $\pi$

$$T_\pi = \frac{W'_\pi}{W_\pi} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 = \frac{\sin 2\theta_i \sin 2\theta_t}{\sin^2(\theta_i + \theta_t) \cos^2(\theta_i - \theta_t)} \quad (14.18)$$

Si verifica che

$$R_\pi + T_\pi = 1 \Rightarrow r_\pi^2 + \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_\pi^2 = 1 \quad (14.19)$$

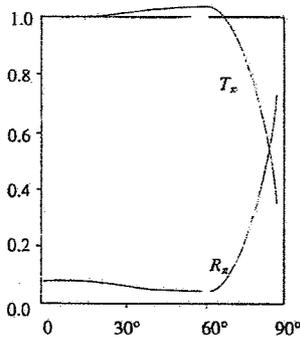


Figura 14.24

in accordo con il principio di conservazione dell'energia. Nella pratica si approssima di (14.19) per calcolare solo  $R_\pi$  e ottenere  $T_\pi$  come  $1 - R_\pi$ , o viceversa.

La figura 14.24 mostra  $R_\pi$  e  $T_\pi$  in funzione di  $\theta_i$  nel caso aria-vetro ( $n_1 = 1, n_2 = 1.5$ ). La maggior parte della luce viene trasmessa, salvo che per angoli di incidenza vicini a  $90^\circ$ . Si nota che per un particolare valore di  $\theta_i$ , non c'è luce riflessa; e infatti analizzando le (14.16) si trova che  $r_\pi$  può essere nullo, mentre  $t_\pi$  non si annulla mai. Torneremo per esteso su questo punto nel seguito del paragrafo. Vedremo anche cosa succede se  $\theta_i = \theta_t = 0$ .

**Intensità riflessa e rifratta per onde polarizzate ortogonalmente al piano di incidenza**

Supponiamo ora che il campo elettrico incidente sia polarizzato rettilineamente ortogonalmente al piano di incidenza  $\pi$ . Nella figura 14.25 il campo elettrico è rivolto verso il lettore e il campo magnetico è orientato di conseguenza, in accordo con (13.9). Anche in questo caso si dimostra che i campi elettrici riflesso e rifratto mantengono la polarizzazione del campo elettrico incidente, per cui i campi magnetici stanno tutti su  $\pi$ . Dalle (14.15) si ha, per le componenti parallele e normali di  $\mathbf{B}$ ,

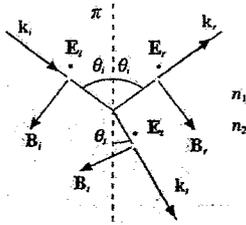


Figura 14.25

$$-\frac{B'_{0,\pi}}{\mu_1} \cos \theta_i + \frac{B_{0,\pi}}{\mu_1} \cos \theta_i = -\frac{B'_{0,\pi}}{\mu_2} \cos \theta_i ,$$

$$B'_{0,\pi} \sin \theta_i + B_{0,\pi} \sin \theta_i = B'_{0,\pi} \sin \theta_i .$$

Dato che in modulo  $B = E / v$  e che con ottima approssimazione  $\mu_1 = \mu_2$ , ricaviamo per i campi elettrici

$$-E'_{0,\sigma} \cos \theta_i + E_{0,\sigma} \cos \theta_i = -v_1/v_2 E'_{0,\sigma} \sin \theta_i .$$

$$E'_{0,\sigma} \sin \theta_i + E_{0,\sigma} \sin \theta_i = v_1/v_2 E'_{0,\sigma} \sin \theta_i ;$$

col simbolo  $\sigma$  indichiamo che il campo elettrico è parallelo ad un piano  $\sigma$  ortogonale al piano di incidenza  $\pi$ . Tenuto conto di (14.11) e (14.12) si ottiene  $E'_{0,\sigma} = r_\sigma E_{0,\sigma}$ ,  $E_{0,\sigma} = t_\sigma E_{0,\sigma}$ , con i coefficienti dati dalle formule di Fresnel nel piano  $\sigma$ :

$$r_{\sigma} = \frac{E_{0,\sigma}^r}{E_{0,\sigma}^i} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{\text{sen } \theta_i \cos \theta_t - \text{sen } \theta_t \cos \theta_i}{\text{sen } \theta_i \cos \theta_t + \text{sen } \theta_t \cos \theta_i} = \frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad (14.20)$$

$$t_{\sigma} = \frac{E_{0,\sigma}^t}{E_{0,\sigma}^i} = \frac{2 n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2 \text{sen } \theta_i \cos \theta_t}{\text{sen } \theta_i \cos \theta_t + \text{sen } \theta_t \cos \theta_i} = \frac{2 \text{sen } \theta_i \cos \theta_t}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)}$$

Procedendo esattamente come nel caso precedente si trovano le espressioni per i coefficienti di riflessione e di trasmissione nel piano  $\sigma$ :

$$R_{\sigma} = \frac{W_{\sigma}^r}{W_{\sigma}^i} = \frac{I_{\sigma}^r}{I_{\sigma}^i} = r_{\sigma}^2 = \frac{\text{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (14.21)$$

$$T_{\sigma} = \frac{W_{\sigma}^t}{W_{\sigma}^i} = \frac{\Sigma_t I_{\sigma}^t}{\Sigma_i I_{\sigma}^i} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\sigma}^2 = \frac{\text{sen } 2\theta_i \text{sen } 2\theta_t}{\text{sen}^2(\theta_i + \theta_t)} \quad (14.22)$$

$$R_{\sigma} + T_{\sigma} = 1 \Rightarrow r_{\sigma}^2 + \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} t_{\sigma}^2 = 1 \quad (14.23)$$

Il coefficiente di riflessione  $R_{\sigma}$  è maggiore di  $R_{\pi}$ , come si vede confrontando le figure 14.26 e 14.24, ma anche in questo caso la trasmissione è predominante. Inoltre entrambi i coefficienti  $r_{\sigma}$  e  $t_{\sigma}$  sono sempre diversi da zero.

Discutiamo brevemente il segno dei coefficienti  $r_{\pi}$ ,  $t_{\pi}$ ,  $r_{\sigma}$ ,  $t_{\sigma}$  definiti dalle formule di Fresnel (14.16) e (14.20). I coefficienti  $t_{\pi}$  e  $t_{\sigma}$  sono sempre positivi, indicando che i campi elettrici trasmessi hanno proprio il verso disegnato nelle figure 14.21 e 14.25. Il coefficiente  $r_{\sigma}$  ha sempre lo stesso segno, che è negativo se  $n_1 < n_2$  e positivo se  $n_1 > n_2$ . Infine il coefficiente  $r_{\pi}$  al crescere di  $\theta_i$  è dapprima positivo, poi si annulla e diventa negativo, se  $n_1 < n_2$ , e ha un comportamento esattamente contrario come segno se  $n_1 > n_2$ . Un segno negativo significa che il campo elettrico in questione ( $E_{\pi}^r$  o  $E_{\sigma}^r$ ) ha verso opposto a quello fissato nelle figure.

Nel caso  $n_1 > n_2$  bisogna ricordare che superato l'angolo limite si ha solo riflessione, nel caso  $n_1 < n_2$  tutto l'intervallo da zero a  $\pi/2$  è disponibile per trasmissione e riflessione, escluso il valore estremo  $\theta_i = \pi/2$  in cui l'onda prosegue indisturbata e la nostra trattazione non si applica.

Per concludere citiamo una proprietà generale dei coefficienti di Fresnel. Supponiamo di avere il passaggio di un'onda piana luminosa dal mezzo con indice di rifrazione  $n_1$  al mezzo con indice di rifrazione  $n_2$ :  $\theta_i$  è l'angolo di incidenza,  $\theta_t$  l'angolo di rifrazione,  $r_1$  e  $t_1$  i coefficienti di Fresnel (nel piano  $\pi$  o nel piano  $\sigma$ ). Se invece l'onda si propaga dal mezzo con  $n_2$  al mezzo con  $n_1$  e l'angolo di incidenza è  $\theta_t$ , l'angolo di trasmissione vale  $\theta_i$ , come si è già notato. In tal caso è immediato provare che i coefficienti  $r_2$  e  $t_2$  sono legati ai precedenti dalle relazioni

$$r_2 = -r_1, \quad t_1 t_2 = 1 - r_1^2 = 1 - r_2^2,$$

dette *relazioni di Stokes*, valide sia nel piano  $\pi$  che nel piano  $\sigma$ . Un'utile applicazione si ha nell'attraversamento di una lastra a facce piane e parallele (esempio 14.4).

È bene sottolineare che le relazioni di Stokes non sono valide se l'angolo di incidenza nei due casi è lo stesso, a meno che non si tratti di incidenza normale,  $\theta_i = \theta_t = 0$ .

Passando ai coefficienti di riflessione e trasmissione si ha

$$R_1 = R_2, \quad T_1 = 1 - R_1 = T_2 = 1 - R_2.$$

Coefficienti di riflessione e trasmissione nel piano  $\sigma$

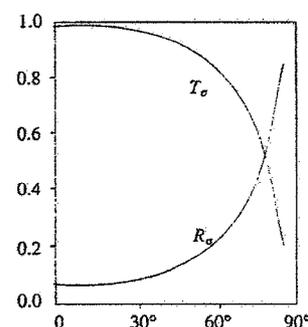


Figura 14.26

Relazioni di Stokes

**Nota. Intensità trasmessa nella riflessione totale**

Nel paragrafo 14.3 abbiamo trattato la riflessione totale soltanto da un punto di vista geometrico; riprendiamo adesso l'argomento considerando i campi e l'intensità. Secondo (14.8)  $k_x = 0$  e perciò il valore del vettore di propagazione dell'onda trasmessa obbedisce alla relazione

$$k_t^2 = \frac{\omega^2}{v_2^2} = \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2 = k_n^2 + k_z^2 .$$

Sappiamo poi da (14.9) che

$$k_n = k_{n_1} = \frac{\omega}{v_1} \sin \theta_i = \frac{\omega}{c} n_1 \sin \theta_i ,$$

per cui

$$k_z^2 = k_t^2 - k_n^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i) .$$

L'angolo limite della riflessione totale è definito dalla (14.13).  $n_2 = n_1 \sin \theta_0$ ; per valori  $\theta_i > \theta_0$  è  $n_2 < n_1 \sin \theta_i$ , di conseguenza  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i$  è minore di zero e  $k_z$  risulta immaginario puro.

Poniamo pertanto  $k_z = i |k_z|$  e scriviamo il campo elettrico trasmesso nella notazione simbolica:

$$E_t = E_{0,t} e^{i(k_x \cdot r - \omega t)} = E_{0,t} e^{i(k_n \cdot y + k_z z - \omega t)} = E_{0,t} e^{-|k_z| z} e^{i(k_n \cdot y - \omega t)} .$$

L'ampiezza del campo è smorzata esponenzialmente, con una lunghezza di smorzamento pari a  $1/|k_z|$ . Dato che  $|k_z|$  non è molto diverso da  $2\pi/\lambda$ , a distanza  $z = \lambda$  dalla superficie di separazione il campo trasmesso è praticamente nullo.

Ad esempio, nel passaggio vetro-aria ( $n_1 = 1.5$ ,  $n_2 = 1$ ) con  $\theta_i = 45^\circ$  si ha

$$\frac{1}{|k_z| \lambda} = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_i - n_2^2}} = 0.45 \lambda .$$

Con  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ , a distanza  $z = 5 (0.45 \lambda) = 2.25 \lambda = 1.35 \mu\text{m}$  l'ampiezza è ridotta a  $6.7 \cdot 10^{-3} E_{0,t}$ .

Per l'intensità la lunghezza di assorbimento è  $1/2 |k_z|$ , pari a  $\sim 0.2 \lambda$  nel caso numerico appena visto.

La verifica sperimentale dell'esistenza dell'onda trasmessa in una regione di profondità circa eguale alla lunghezza d'onda è stata fatta accostando parallelamente ad una interfaccia piana vetro-aria un'altra interfaccia piana aria-vetro. Si illumina la prima interfaccia in condizioni di riflessione totale e si osserva trasmissione di luce attraverso il sottile strato d'aria, con la prevista decrescita esponenziale in funzione dello spessore d'aria. Le due superficie di vetro affacciate devono essere accuratamente lavorate, con una deviazione dal piano ideale ben al di sotto di  $\lambda$ , cioè di  $0.5 \mu\text{m}$ . Chiaramente l'esperimento è più facile operando con microonde ( $\lambda = 1 \text{ cm}$ ), le quali presentano anch'esse il fenomeno della riflessione totale, ad esempio nel passaggio paraffina-aria.

**Incidenza normale alla superficie di separazione**

Quando l'angolo di incidenza è nullo la direzione di incidenza coincide con la normale alla superficie di separazione e la nozione di piano di incidenza perde significato. I campi elettrici dell'onda incidente, dell'onda riflessa e dell'onda trasmessa sono paralleli tra loro e alla superficie e le (14.15) si riducono all'unica condizione