Soluzioni compito campi e potenziali, radiazione, relatività

June 14, 2016

Il punto c dell'esercizio 2, in cui bisogna considerare l'effetto Doppler relativistico, è da considerarsi facoltativo.

Nota: i risultati numerici possono variare leggermente a seconda della precisione con cui sono prese la velocità della luce, la massa delle particelle, ecc..

Esercizio 1

L'energia totale irradiata è

$$U_{rad} = P_{rad}\Delta t,$$

dove Δt è il tempo che la carica impiega a fermarsi completamente

$$\Delta t = \frac{v_0}{|a|}$$

e P_{rad} è data dalla formula di Larmor

$$P_{rad} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}.$$

La frazione di energia che viene irradiata è

$$f = \frac{U_{rad}}{K} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}\frac{v_0}{|a|}\frac{1}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{\mu_0 q^2 a}{6\pi c}\frac{1}{\frac{1}{2}mv_0}.$$

Quindi il momento inziale della carica è

$$p_0 = \frac{\mu_0 q^2 |a|}{3\pi c f} = 2.85 \cdot 10^{-42} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Esercizio 2

a

Il periodo spaziale del campo magnetico osservato dall'elettrone è

$$L_{e^-} = \frac{L_{Lab}}{\gamma}.$$

Si ricava γ da

$$E = E_K + E_0$$

$$E_K = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0$$

$$
\begin{aligned}
\frac{E_K}{E_0} &= \gamma - 1 \\
&= \frac{2.4 \text{ GeV}}{0.5\text{MeV}} = 4800 \\
\gamma &\simeq 4800.
\end{aligned}
$$

Il periodo osservato dall'elettrone è quindi

$$L_{e^-} = \frac{L_{Lab}}{\gamma} = \frac{0.2 \text{ m}}{4800} = 4.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

b

La frequenza della radiazione emessa dall'elettrone, come osservata nel sistema di riferimento dell'elettrone è

$$\omega_{e^-} = \frac{2\pi v}{L_{e^-}} \simeq \frac{2\pi c}{L_{e^-}} = \frac{2\pi c\gamma}{L_{Lab}} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 4.8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-1}} s^{-1} \simeq 4.8 \cdot 10^{13} \text{s}^{-1}$$

c

La frequenza della radiazione osservata nel sistema del laboratorio è diversa da ω_{e^-} a causa dell'effetto Doppler:

$$
\begin{aligned}
\omega_{Lab} &= \frac{\omega_{e^-}}{\gamma(1-\beta\cos(\alpha))} \\
&= \frac{\omega_{e^-}}{\gamma(1-\beta)}
\end{aligned}
$$

Essendo β molto vicino a 1, $(1-\beta) \simeq \frac{1}{2\gamma^2}$ e quindi

$$\omega_{Lab} = \omega_{e^-} \frac{2\gamma^2}{\gamma} = \omega_{e^-} 2\gamma = \frac{2\pi c\gamma}{L_{Lab}} 2\gamma = \frac{2\pi c}{\frac{L_{Lab}}{2\gamma^2}}$$

La lunghezza d'onda osservata nel laboratorio è

$$\lambda_{Lab} = \frac{L_{Lab}}{2\gamma^2} = \frac{2 \cdot 10^{-1} \text{ m}}{46 \cdot 10^6} = 4.3 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 4.3 \text{ nm}$$

Esercizio 3

Nel sistema di riferimento della Terra la vita media della particella è

$$\bar{\tau} = \gamma\tau.$$

La distanza che deve percorrere ($D_T = 1.5 \cdot 10^{12} m$) deve essere pari a

$$D_T = vt = \beta c\gamma\tau$$

$$\beta\gamma = \frac{D_T}{c\tau}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{c\tau}{D_T}\right)^2}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \simeq 5.77$$

L'energia totale E del neutrone deve essere, quindi,

$$E = \gamma E_0 = \gamma M_n c^2 = 5.77 \cdot 930.5 \text{ MeV} \simeq 5.4 \text{ GeV}$$

Esercizio 4

a

Il sistema di riferimento del centro di massa, se si scontrano due fasci uguali, coincide con quello del laboratorio. L'energia totale nel centro di massa è

$$E_{TOT} = 2E = 14 \text{ TeV}.$$

b

Nel caso del fascio che collide con un bersaglio fisso è necessario scrivere $(cp_\mu)(cp^\mu)$ nel sistema di riferimento del laboratorio ed eguagliarla a quella nel sistema del centro di massa, che si impone essere pari ad E_{TOT}. Nota: nel sistema del centro di massa, il momento totale è nullo.

$$(E_{TOT})^2 = (\bar{E} + m_p c^2)^2 - (pc)^2,$$

dove $\bar{E}$ è l'energia totale del protone in moto, p il suo momento e m_p la massa del protone. Il primo termine del membro di destra contiene l'energia totale del protone in moto e quella totale del protone nel bersaglio fisso (quindi solo la sua energia a riposo).

$$(E_{TOT})^2 = \bar{E}^2 + (m_p c^2)^2 + 2\bar{E} m_p c^2 - (pc)^2$$

Poiché $\bar{E}^2 - (pc)^2 = (m_p c^2)^2$

$$(E_{TOT})^2 = 2(m_p c^2)^2 + 2\bar{E} m_p c^2.$$

L'energia del protone in moto (nel sistema di riferimento del laboratorio) è

$$\bar{E} = \frac{E_{TOT}^2 - 2(m_p c^2)^2}{2 m_p c^2} \simeq \frac{E_{TOT}^2}{2 m_p c^2} \simeq \frac{(14 \text{ TeV})^2}{1.876 \text{ GeV}} \simeq 10^5 \text{ TeV}$$